Chapitre 7

STABILITE

Les graphes fonctionnels sans cycle peuvent sembler sans problème. Comme on l'a vu au chapitre 5, tout coloriage sensoriel de graphe fonctionnel sans cycle est contenu dans un et un seul état stable, d'ailleurs effectivement atteint par le graphe, pourvu que ce coloriage sensoriel perdure assez longtemps. Comme tout coloriage de graphe contient un coloriage sensoriel, tout coloriage de graphe fonctionnel sans cycle <u>détermine</u> un état stable, auquel le graphe accèdera effectivement pour autant que la restriction sensorielle du coloriage de départ reste constante assez longtemps. Mais même dans le cas des graphes sans cycle, et apparemment sans problème, la <u>pensée</u> menant du coloriage de départ, à l'état stable qu'il détermine, peut dépendre, non seulement du coloriage de départ, mais aussi de la distribution des délais en les divers sommets. Plus corsée encore est la situation de l'ordinateur, condamné à vivre avec ses cycles, car sa raison d'être ambitionne une intelligence artificielle douée de mémoire, dont les retours aux sources sont, par nature, à caractère inévitablement cyclique.

On comprend dès lors qu'en graphe boolien non nécessairement dépourvu de cycle, on se contente souvent de déterminer les états stables. Ce n'est que dans les cas les plus favorables, que nous tenterons parfois de suivre le cheminement de la pensée entre certains états stables.

Comme les graphes booliens se montent en noir, la détermination de leurs états stables revient à celle des coloriages stables des graphes noirs. Les sommets noirs sont les sommets booliens à stabilité nucléique, en ce sens, qu'ils sont les sommets booliens dont la stabilité est signifiée par la condition (nécessaire et suffisante) de nucléicité locale. Et les graphes noirs sont les graphes booliens à stablilité nucléique, en ce sens, qu'ils sont les graphes booliens dont les états stables sont les coloriages nucléiques.

D'où, compte tenu du Théorème 2 :

Théorème 7 (Christine Decaestecker, 1985)

Les graphes noirs sont les graphes booliens dont les noyaux sont les domaines des sous-graphes rouges des états stables

Comme le Chapitre 3 construisit les sous-graphes nucléiques à partir des noyaux, le théorème 7 permet de construire les états stables d'un graphe boolien à partir des noyaux d'un de ses montages noirs. Comme chaque noyau de graphe pur et simple définit <u>ses</u> sous-graphes nucléiques, tout noyau N de graphe noir G définit <u>ses</u> états stables du graphe G . Leur nombre est le produit

$$2^{n} \ast_{s} (2^{n_s} - 1)$$

où :

<u>n</u> désigne le nombre des sensorielles de G qui partagent leur extrémité avec au moins une flèche de G à origine dans N.

<u>s</u> parcourt l'ensemble des sommets de G situés hors de N et sans flèche d'entrée à origine dans N .

n_s désigne le nombre des sensorielles de G d'extrémité <u>s</u>.

J. von Neumann et O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior
Princeton University Press, Princeton 1944, 1947, 1953

<u>Théorème 8</u> (von Neumann 1944)

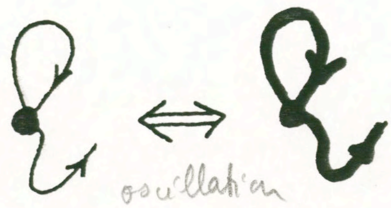
> Tout graphe G sans cycle (non nul) ni sensorielle contient un et un seul noyau.

En noircissant ses sommets, érigeons G en graphe noir. Par le Théorème 5 , il admet un et un seul état stable et donc, par le Théorème 7 , il contient un et un seul noyau.

CQFD

Le <u>pétale</u> (à sommet) <u>noir</u> sans entrée, avec ou sans sortie

est <u>coeur</u> <u>battant</u> à mouvement alternatif spontané.



Le coeur battant à sortie débite un courant boolien alternatif.

*

* *

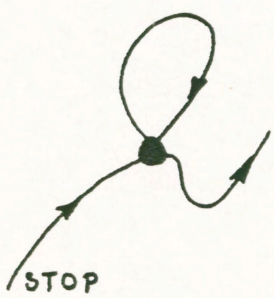
LE METRONOME

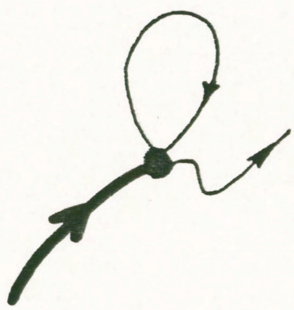
Pétale noir à entrée et sortie de contrôle nommée STOP.

Allergique aux noyaux non vides, à cause du pétale,

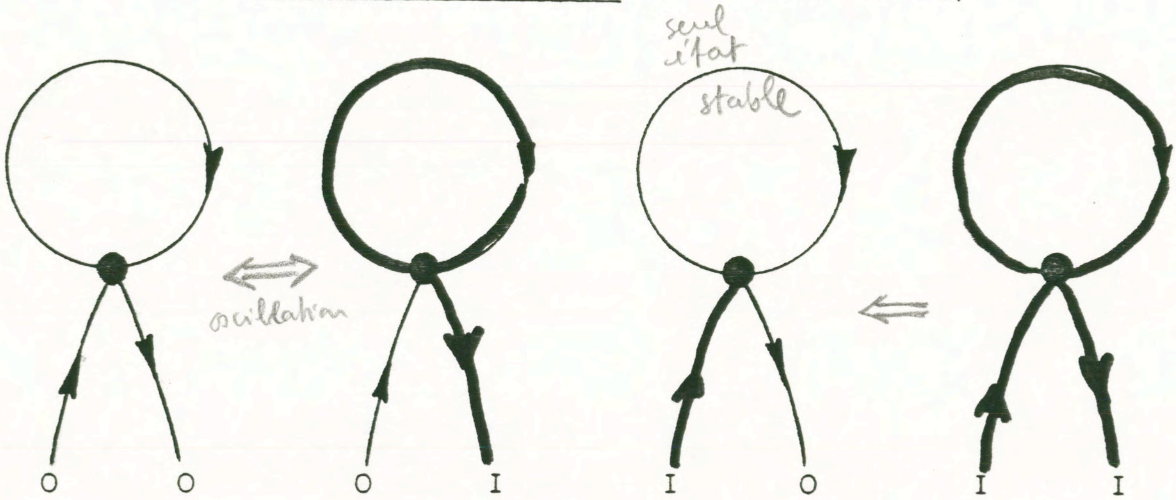
il admet le noyau vide qui, par le théorème 7,

définit son unique coloriage stable :

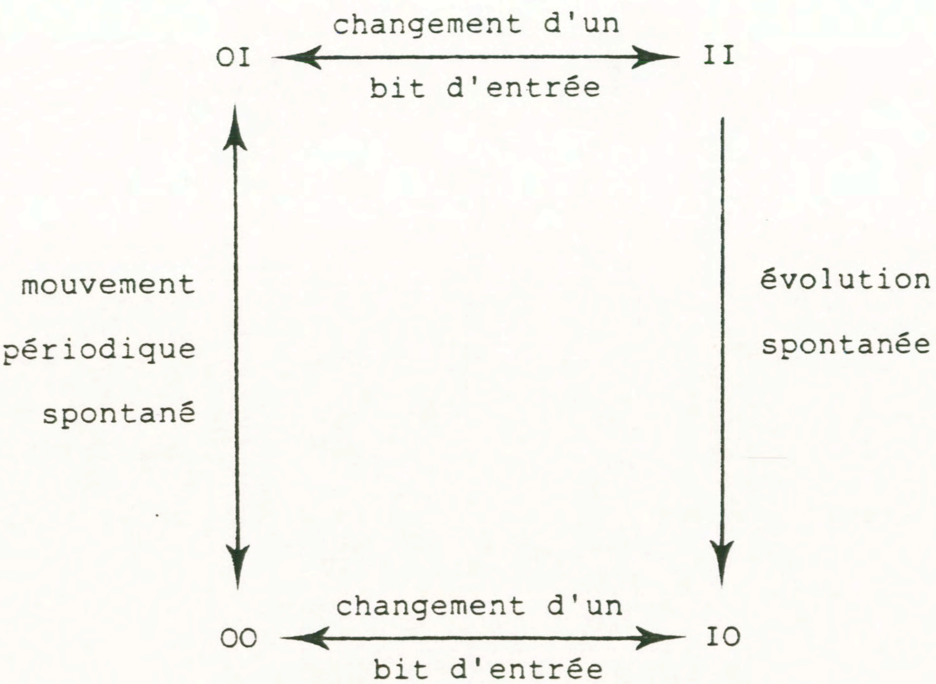




Tant que son contrôle d'entrée, ou stop reste bleu ou nul, le métronome se comporte comme le coeur battant, ou pétale noir à sortie et sans entrée, et débite un courant boolien alternatif. Le passage du stop au rouge éteint la sortie et arrête le battement. Comme toutes les flèches de sortie d'un sommet noir branché ont toujours simultanément une même couleur, le métronome admet exactement quatre coloriages (dont un seul stable) aussitôt codés par les coloriages externes (d'entrée-sortie)

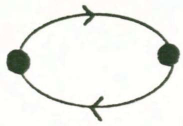


D'où l'organigramme (à un seul état stable)



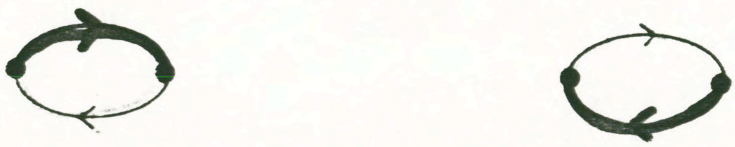
FLIPFLOP

Le flipflop ou aller-retour à sommets noirs distincts



refuse noyau vide et noyau plein et contient deux noyaux singletons

qui définissent ses deux états stables

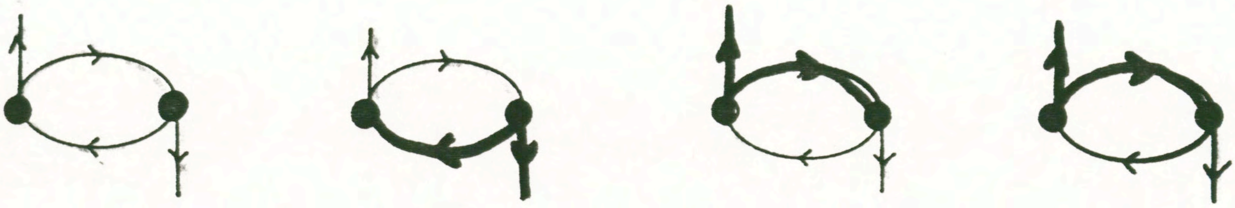


Ses deux autres coloriages

sont non stables.

Sauf information concernant les délais attachés à chacune des couleurs d'entrée en chacun des sommets, l'évolution ultérieure à partir de ces deux états non stables est incertaine.

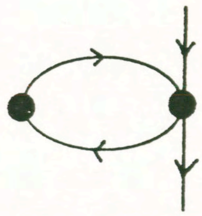
On peut évidemment doter l'un ou l'autre, ou chacun, de ces sommets d'une sortie apte à recueillir un courant informatif constant en cas d'état stable, sans rien changer à l'incertitude des états non stables.



Afin d'intervenir dans la situation,

on dote le flipflop d'une entrée en l'un au moins de ses sommets.

Le <u>flipflop à entrée et sortie au même sommet</u>



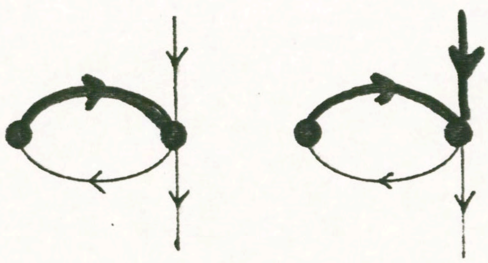
refuse toujours noyau vide et noyau plein,

et contient encore deux noyaux singletons

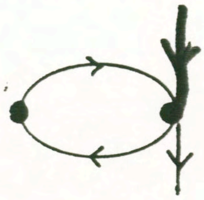
mais l'un d'eux définit cette fois <u>deux</u> coloriages stables:

Le noyau gauche définit
ces deux états stables

Le noyau droit impose
cet état stable unique



En cas d'entrée maintenue bleue (ou éteinte)



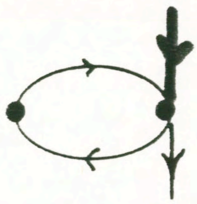
le reste du graphe, laissé noir par le dessin,

évolue de manière autonome, comme un flipflop sans entrée,

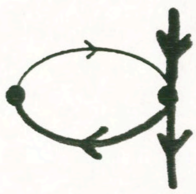
avec deux états stables

et deux états non stables, à évolution incertaine

Un allumage durable de l'entrée



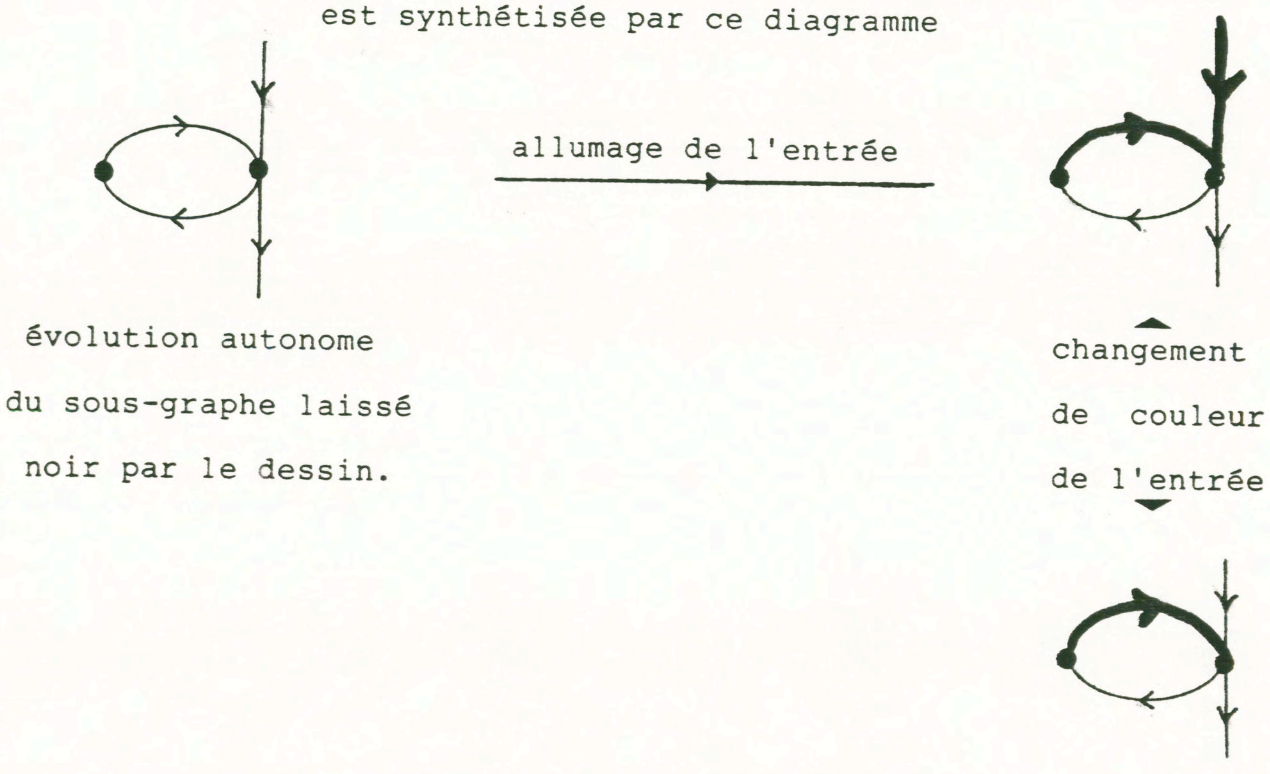
cause l'extinction des flèches issues de son extrémité



entraînant l'allumage de l'autre flèche interne

Ainsi, l'allumage durable de la flèche d'entrée met le flipflop en l'état stable représenté par le dessin précédent. Par la présence de la flèche interne rouge, le coloriage reste désormais insensible à l'extinction et à l'allumage de la flèche d'entrée

Toute l'évolution du coloriage
du flipflop à entrée et sortie au même sommet
est synthétisée par ce diagramme



Un allumage durable de l'entrée
du flipflop à entrée et sortie en un même sommet,
provoque l'extinction irréversible de la sortie,
tant que le graphe restera branché,
entrée allumée, éteinte ou rallumée ...

Ainsi, l'allumage durable de la flèche d'entrée met le flipflop en l'état stable représenté par le dessin précédent. Par la présence de la flèche interne rouge, le coloriage reste désormais insensible à l'extinction et à l'allumage de la flèche d'entrée

Toute l'évolution du coloriage
du flipflop à entrée et sortie au même sommet
est synthétisée par ce diagramme

allumage de l'entrée
------------>------------

évolution autonome du sous-graphe laissé noir par le dessin.	changement de couleur de l'entrée

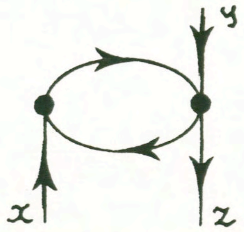
Un allumage durable de l'entrée
du flipflop à entrée et sortie en un même sommet,
provoque l'extinction irréversible de la sortie,
tant que le graphe restera branché,
entrée allumée, éteinte ou rallumée ...

Pour rompre cette irréversibilité,

une seule possibilité d'intrusion dans le graphe:

Doter ce flipflop d'une entrée de secours en l'autre sommet.

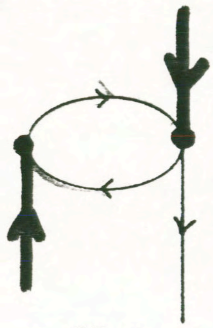
Le <u>flipflop à double entrée et simple sortie</u>



xy z

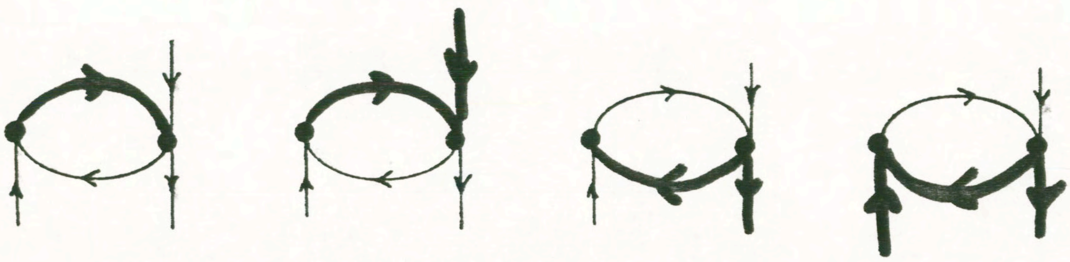
contient trois noyaux:

le noyau vide, à coloriage stable unique



II o

et les deux noyaux singletons, chacun à deux coloriages stables



oo o   oI o   oo I   Io I

La confrontation des états stables clairement codés ooo et ooI

montre que ce flipflop n'est pas sommet fonctionnel.

Mais c'est son seul défaut de fonctionnalité, car on voit aisément que, de manière plus précise,

chacune des entrées globales non nulles   oI   Io   II

cause, à elle seule, <u>son</u> état stable   oIo   IoI   IIo

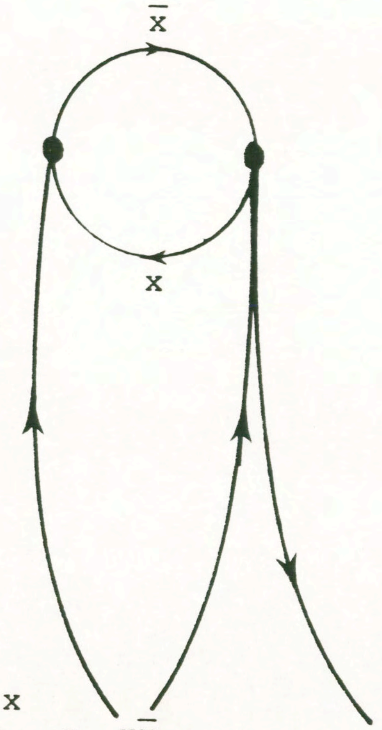
La restriction fonctionnelle aux entrées puissances de 2, récrite

$$\mathrm{oI} = \mathrm{Io}^{\mathrm{o}} \longmapsto \mathrm{o} \qquad \mathrm{Io} = \mathrm{Io}^{\mathrm{I}} \longmapsto \mathrm{I}$$

est logarithme de base 2, à valeurs entières,

brièvement nommé <u>logentier</u>.

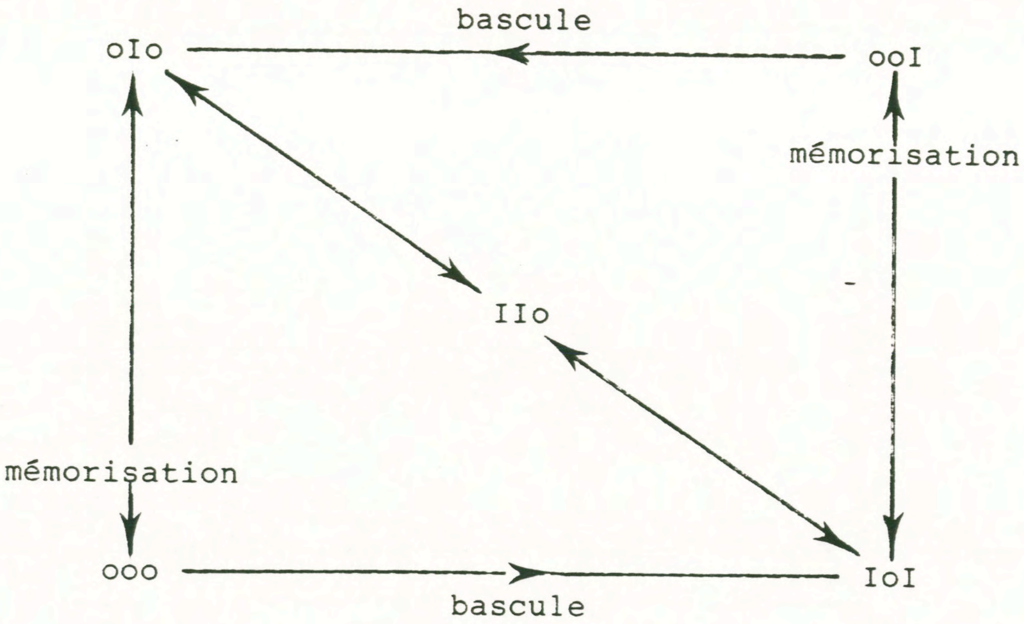
L'entrée en ce flipflop de $x\bar{x} = \mathrm{Io}^{x}$ cause l'état stable



$\mathrm{Io}^{x} = x\bar{x}$ $\qquad$ $x = \log x\bar{x} = \log \mathrm{Io}^{x}$

où log désigne le <u>logarithme binaire</u>, ou logarithme en base 2.

Codant clairement oIo IoI IIo les trois états stables fonctionnels et ooo ooI les deux autres états stables, le diagramme des états stables du flipflop à double entrée et sortie simple se trace



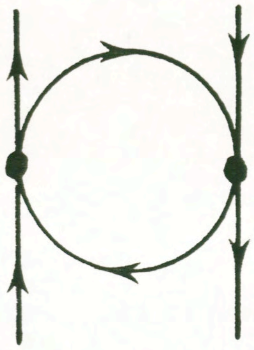
Le passage d'un état stable à un autre, en suivant une flèche du diagramme est provoqué par le changement d'état d'une et d'une seule flèche d'entrée. L'introduction, dans le flipflop à double entrée et sortie simple, de toute puissance de deux , cause la sortie de son logarithme en base deux, et ce résultat se mémorise par annulation de l'entrée.

Théorème 9

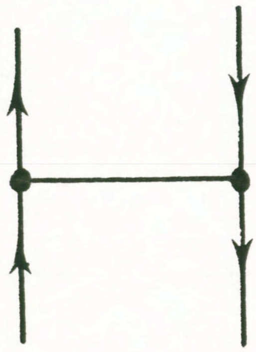
> Le flipflop à double entrée et sortie simple
> est un logarithme entier de base deux
> qui mémorise par annulation de l'entrée.

Commes les sorties du <u>flipflop à entrée et sortie doubles</u>

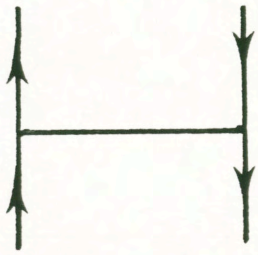
présenté en version centrosymétrique



révèlent tout son coloriage interne, il se schématise volontiers



voire

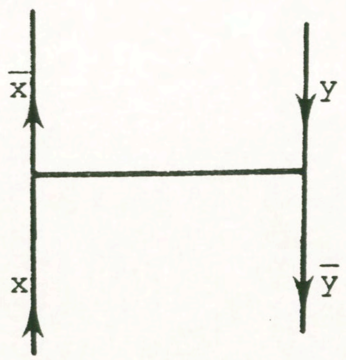


Symétrisé, pour le meilleur et pour le pire, du flipflop à entrée double et sortie simple, le flipflop à entrée et sortie doubles en hérite les propriétés reformulées de manière adéquate :

Sauf en cas d'entrée toute nulle $xy = oo$,

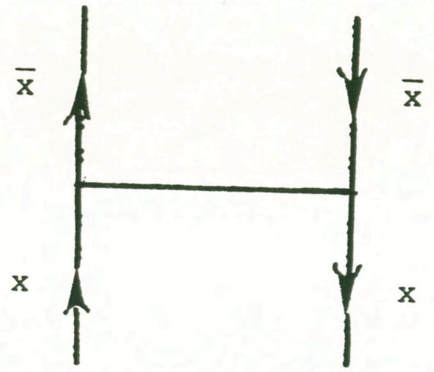
le flipflop à entrée et sortie doubles est fonctionnel

et <u>inverse</u>, $xy \dashrightarrow \overline{xy}$, toute entrée non toute nulle



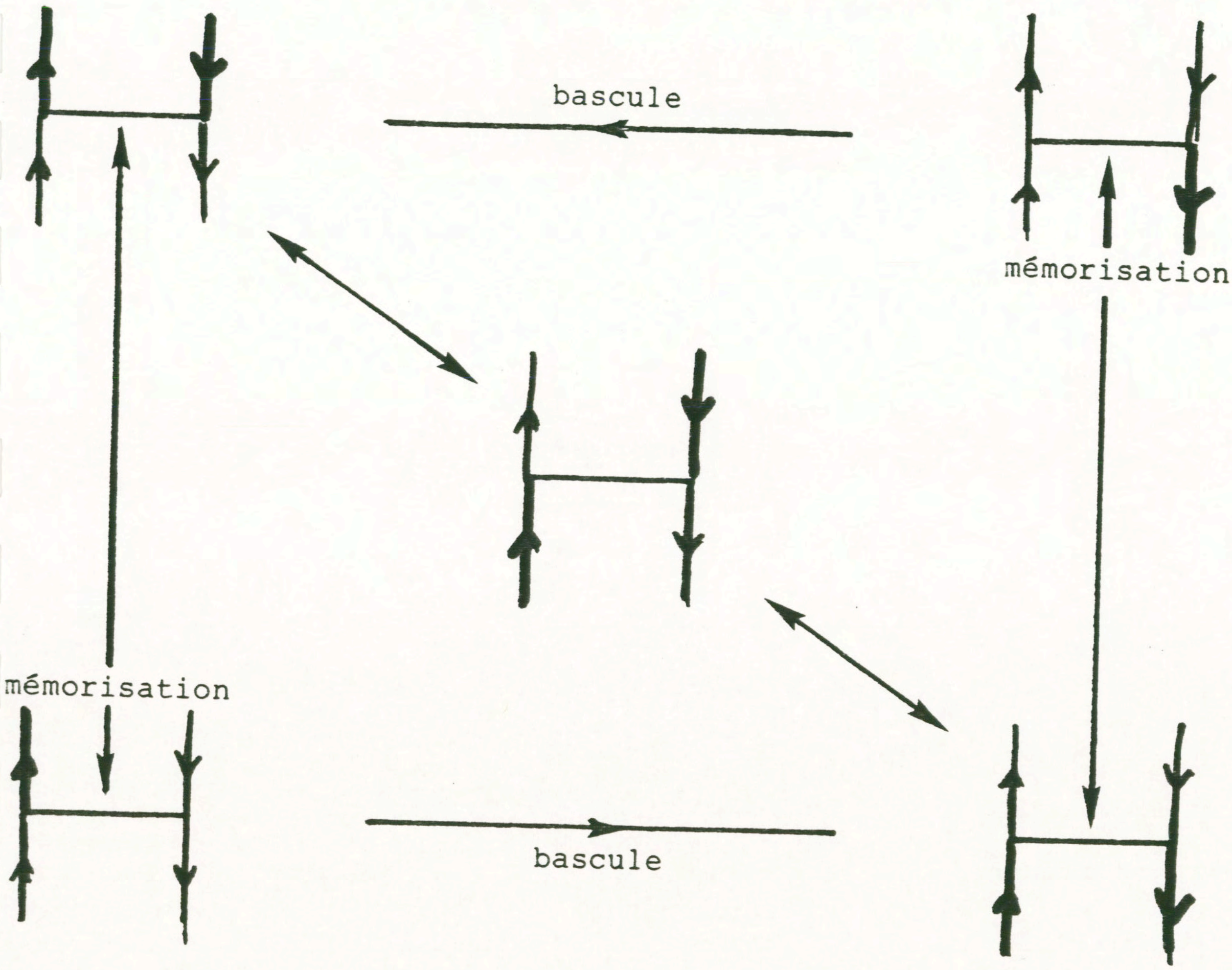
$oI \longleftrightarrow Io \qquad II \longmapsto oo$

En particulier, toute entrée bicolore $x\bar{x}$ vérifie



$x\bar{x}$ <---> $\bar{x}x$

Le flipflop à entrée et sortie doubles admet cinq états stables régis par ce diagramme d'évolution.

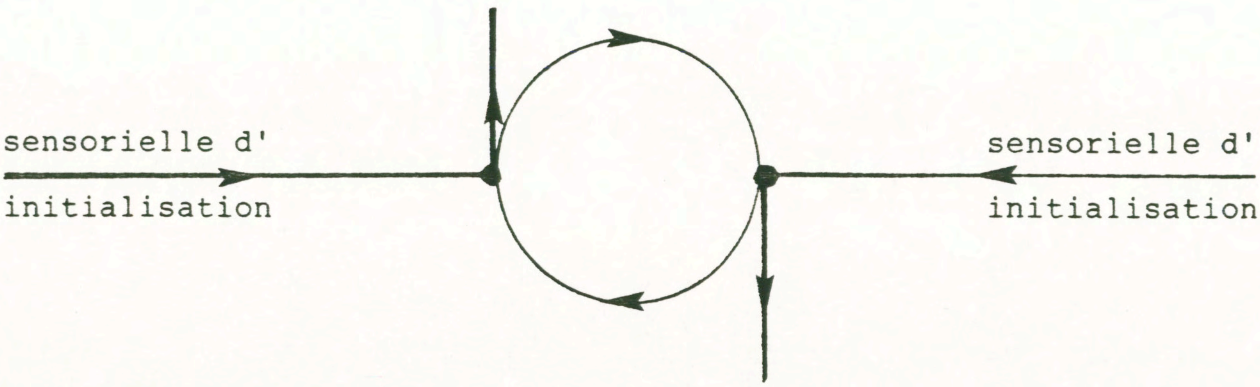


INITIALISATION

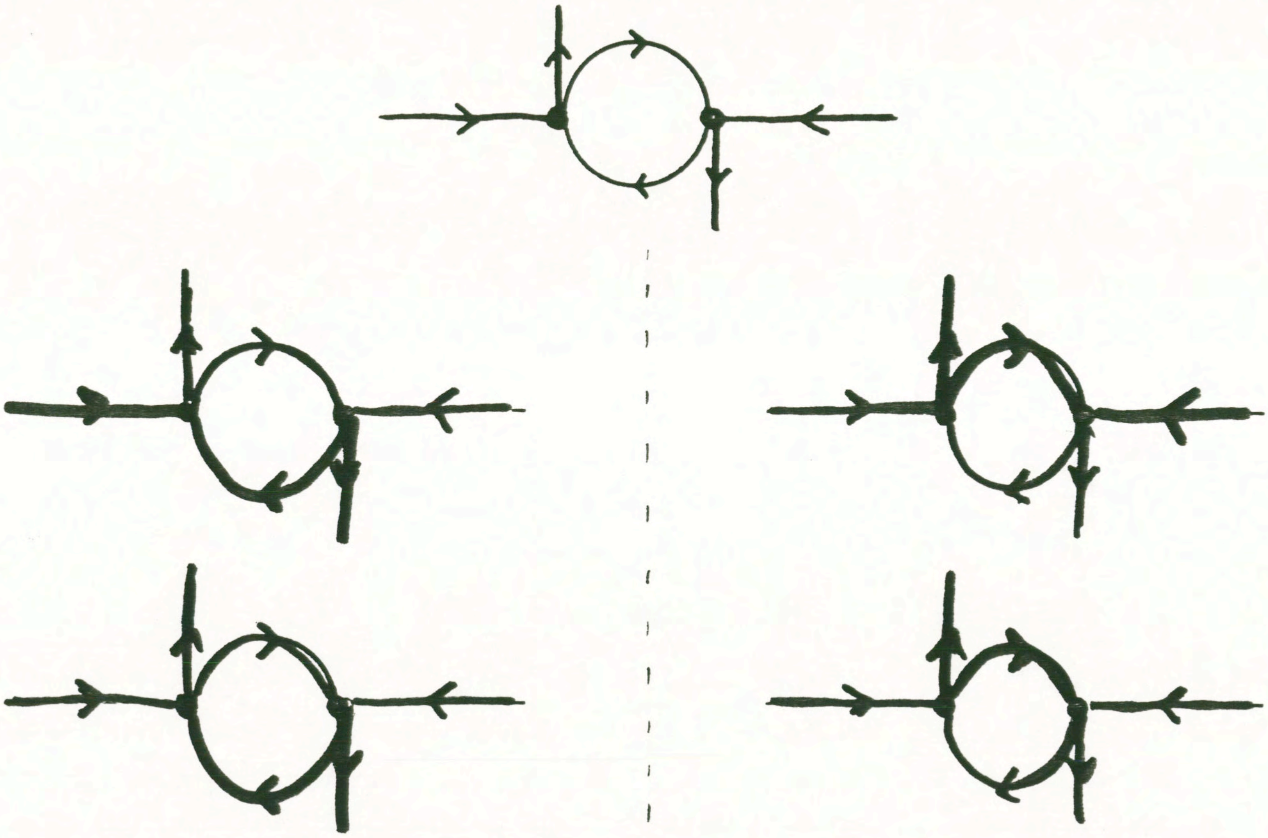
Initialiser un flipflop enfoui dans un ordinateur,
c'est le mettre, de l'extérieur,
dans un de ses deux états de mémorisation, au gré de l'opérateur.

Cette opération s'exécute
quand ce flipflop se trouve en état de mémorisation, c'est-à-dire
quand toutes les flèches qui aboutissent en ses sommets
sont bleues ou nulles
ce dont s'auroriseront les schémas ci-dessous
pour ne pas les desssiner.

Dans l'intention annoncée
le flipflop s'équipe de deux entrées sensorielles

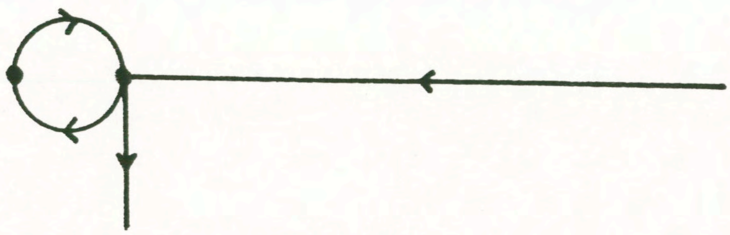


permettant les procédures d'initialisation
décrites ci-après



Dans la suite, on supposera tous les flipflops munis d'un dispositif permettant de les initialiser selon le voeu de l'opérateur.

Une seule sensorielle d'initialisation,



suffit à la <u>mise à zéro</u> graphiquement décrite en page suivante

d'un flipflop à une seule flèche de sortie,

supposé en état de mémorisation:

bleue toute entrée d'ailleurs non dessinée

autre que la sensorielle d'initialisation.